**CAPÍTULO I**

**TEMA B: LÍMITE DOBLE**

* **CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN EL ESPACIO**

**Entorno de un punto**

**En IR :**

Sea x = a un punto de la recta real, y h un número real positivo

El entorno de un punto x = a , con amplitud h, se define como el conjunto de puntos de la recta, cuya distancia al centro **a**  es menor que **h**. En símbolos:

**E(a, h)={ x / x ∈ IR, d(x,a) < h } o E(a, h) ={ x/ x∈IR , a-h < x < a +h }**

Gráficamente es un intervalo abierto

**\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_ IR**

**a-h a a +h**

**En IR2 :**

Sea **A (a , b)** un punto del plano , y **h** un número real positivo.

El entorno de un punto A = ( a, b) , con amplitud h, se define como el conjunto de puntos del plano, cuya distancia al centro A es menor que h. En símbolos:

**E(A, h)={ (x,y) / ( x,y) ∈ IR2, d( (x,y) , A) < h }**

Gráficamente es un disco abierto de radio h.

a

b

h

**En IR3 :**

Sea A (a , b ,c) un punto del espacio , y h un número real positivo.

El entorno de un punto **A = ( a, b, c)** , con amplitud **h**, se define como el conjunto de puntos del espacio, cuya distancia al centro **A**  es menor que **h**. En símbolos:

**E(A, h)={ (x,y,z) / ( x,y,z) ∈ IR3, d( (x,y,z) , A) < h }**

Gráficamente es una esfera de centro **A** y radio **h**.

c

b

a

**Entorno reducido:**

El entorno reducido es el entorno común pero se excluye el centro

**En IR :**

**E \*(a, h)={ x / x ∈ IR, d(x,a) < h , x ≠a }**

Gráficamente

**\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_ IR**

**a-h a a +h**

**En IR2 :**

**E \*(A, h)={ (x,y) / ( x,y) ∈ IR2, d( (x,y) , A) < h , ˄ (x,y) ≠ (a,b) }**

Gráficamente

a

b

h

**En IR3 :**

**E \*(A, h)={ (x,y,z) / ( x,y,z) ∈ IR3, d( (x,y,z) , A) < h , (x,y,z) ≠( a,b,c)}**

Gráficamente

c

b

a

**Punto de acumulación de un punto en el espacio**

Sea **S**una región del plano ( S IR2 ) y A = (a,b) que pertenece a IR2.

**A( a,b) es punto de acumulación de S , si y solo si, en todo entorno reducido del punto A, hay al menos un elemento de S.**

En símbolos:

**A es punto de acumulación de S** ϕ

* **LÍMITE DOBLE**

Veremos ahora el concepto de límite para funciones de dos variables.

En realidad el concepto es muy similar a lo visto para una variable.

Tenemos una función **z = f(x,y)**  y el punto **A (a,b)** de acumulación de su dominio

Al igual que para funciones de una variable, queremos averiguar cómo se comportan los valores de la función z = f(x,y) cuando (x,y) tiende a (a,b) o sea cerca de A , NO en A ( al igual que para fc de una variable: en límite NO interesa lo que pasa en el punto sino cerca del punto)

Simbólicamente lo expresamos de la siguiente manera: ****

Ahora **¿qué significa (x,y)** 🡪**(a,b)?**

El punto (x,y) es un punto del plano que pertenece a un **E \*(A, ∂),** y debemos aproximarlo al punto A.

Pero el punto puede moverse **siguiendo cualquier camino hacia A**, por que se mueve en el plano.

b

a

**La función z = f(x,y) tiene límite L en el punto A(a,b) si y solo si, al tender el punto (x,y) hacia el punto A(a,b) POR TODOS LOS CAMINOS POSIBLES, sus imágenes se acercan cada vez más al mismo número L.**

Si al tomar un camino las imágenes tienden a un valor, y tomando otro camino tienden a otro valor distinto entonces **EL LÍMITE NO EXISTE**.

**Propiedades del límite doble**

Son válidas las mismas propiedades que vimos para funciones de una variable:

Sean f(x,y) y g(x,y) dos funciones que tienen límite finito y único en el punto A(a,b):

** **

**a) **

**b) **

**c)  si L2 ≠ 0**

**d)  si n es par entonces debe ser L1  ≥ 0**

**También es válido el concepto de infinitésimos en el punto (a,b):**

**f(x,y) es un infinitésimo en (a , b) **

**Y de límites notables, por ejemplo**

****

**Forma de cálculo del límite doble**

1. **Sustitución directa:**

Para calcular un límite doble se reemplaza a **x** e **y** , por los valores a los que tienden

Ejemplos:

**a) **

**b) **

**c)  en este caso no existe límite finito**

**d) **

**en este caso da indeterminado, para salvar la indeterminación podemos factorizar**

****

**e)** 

En este caso no se puede simplificar, pero podemos aplicar límites notables, y nos quedaría que el límite es 1.



**Aclaración:** En el caso de funciones de dos variables, **NO SE PUEDE APLICAR REGLA DE L’HOPITAL**.

Si no se puede factorizar, o no se sabe cómo hacerlo, existen otras formas de determinar si existe o no el límite

La idea es transformar a la función de dos variables en una función de una variable, y poder salvar así la indeterminación con todos los métodos ya sabidos.

Para ello se utilizan dos métodos:

**a) Limites reiterados o iterados**

**b) Límites direccionales**

Veremos ahora :

**a) Límites reiterados o iterados**

Como el punto (x,y) se puede aproximar al punto A(a,b) siguiendo cualquier camino, vamos a elegir un camino particular. Vamos a mover al punto siguiendo caminos paralelos a los ejes x e y.

Son dos los caminos que tomaremos:

* Primero movemos al punto (x,y) paralelamente al eje **x ( es decir hacemos tender primero la x al valor a)**, y luego lo movemos paralelamente al eje **y ( hacemos tender la y al valor b)**.

Gráficamente:

en el plano x-y

b

a

En el ejercicio sería:



Gráficamente: primero x 🡪 a



b

a

Todos los puntos de la superficie tienden a la curva 

Ahora hacemos que y 🡪b

**L12**

a

b

* Primero movemos al punto (x,y) paralelamente al eje **y ( hacemos tender la y al valor b)**, y luego lo movemos paralelamente al eje **x ( es decir hacemos tender la x al valor a)**.

Gráficamente:

en el plano x-y

b

a

En el ejercicio sería:



a

b



Primero y 🡪b

Todos los puntos de la superficie tienden a la curva 

b

a

Ahora hacemos que x 🡪 a

**L21**

En este caso hemos tomado dos caminos particulares.

* **Si L12 ≠ L21** **PODEMOS ASEGURAR QUE NO EXISTE LÍMITE,**  ya que si existiera debe dar lo mismo por todos los caminos posibles
* **Si L12 = L21** **NO PODEMOS ASEGURAR NADA,**  porque sólo hemos probado por dos caminos.

**Ejemplo I:**



Tomamos límites reiterados, calculamos primero L12





Como L12 ≠ L21 **ASEGURAMOS QUE NO EXISTE LÍMITE**

**Ejemplo II:**







Como L12 ≠ L21 **ASEGURAMOS QUE NO EXISTE LÍMITE**

**Ejemplo III:**







Como L12 ≠ L21 **ASEGURAMOS QUE NO EXISTE LÍMITE**

**Ejemplo IV:**







Si L12 = L21 **NO PODEMOS ASEGURAR NADA,**  porque sólo hemos probado por dos caminos.

Qué hacemos en este caso , aplicamos el otro método de límites direccionales.

**b) Límites direccionales**

En este caso movemos al punto (x,y) hacia el punto A(a,b) siguiendo cualquier camino, por supuesto que pase por el punto A.

Supongamos que la fórmula del camino elegido es **y = g(x).** Sustituimos en la fórmula de la función f(x,y) a la **y** por la ecuación del camino



Si L1 y los reiterados son distintos aseguramos que no existe límite. Pero si da igual, no podemos asegurar nada y debemos probar por otro camino.

**Ejemplo V:**

En el ejemplo anterior 

Tomemos por ejemplo todos los caminos rectos que pasen por (0,0), es decir **y = mx**



Esto quiere decir que el valor del límite depende de la pendiente de la recta que se tome, por lo tanto **NO EXISTE EL LÍMITE.**

**Ejemplo VI**:

Verifique que no existe el límite doble indicado



Tomamos primero límites reiterados:





Si L12 = L21 **NO PODEMOS ASEGURAR NADA,**  porque sólo hemos probado por dos caminos.

Qué hacemos en este caso , aplicamos el otro método de límites direccionales.

Tomemos por ejemplo todos los caminos rectos que pasen por (0,0), es decir **y = mx**



Coincide con los límites reiterados pero NO PODEMOS ASEGURAR NADA, POR QUE SÓLO HEMOS PROBADO TRES CAMINOS.

Tomamos otro camino, por ejemplo parábola, y = x2



En este caso da distinto, por lo tanto **no existe el límite**

* **CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES**

Una función z = f (x,y) es continua en el punto ( a , b ), interior de una región S ( abierta) si y sólo si la función está definida en dicho punto , y es igual al límite doble de la función cuando (x,y) 🡪 (a,b).

Es decir:



Una función z = f (x,y) es continua en la región S si y sólo si es continua en cada punto de S

**Propiedades de las funciones continuas**

Si **k** es un número real y, **f (x,y) y g(x,y)** son funciones de dos variables continuas en el punto (a,b) , entonces las siguientes funciones también son continuas en (a,b) :

**k.f(x,y)**

**f(x,y) . g(x,y)**

**f(x,y) ± g(x,y)**

 si g(a,b) ≠ 0

Estas propiedades permiten garantizar la continuidad de las funciones polinómicas y racionales en cada punto de su dominio.

**Ejemplos:**

I)Analice la continuidad de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) z = x . y 2 en el punto (1,3)

veamos si tiene imagen: f (1,3) = 9 **sí tiene imagen**

Calculamos ahora su límite en ese punto:



Vemos que coincide el valor de la imagen con el del límite , por lo tanto **SÍ ES CONTINUA EN DICHO PUNTO**

b) z =  en el punto ( 4 ,2)

Su dominio es 

Primero veamos si tiene imagen: f (4,2) =  **sí tiene imagen**

Calculamos ahora su límite en ese punto:



Vemos que coincide el valor de la imagen con el del límite , por lo tanto **SÍ ES CONTINUA EN DICHO PUNTO**

**II) Verifica que la siguiente función no es continua en el punto indicado:**

 si (x,y) ≠ (0,0)

z =

0 si (x,y) = (0,0)

Primero veamos si tiene imagen: f (0 ,0) = 0 **sí tiene imagen**

Calculamos ahora su límite en ese punto:

 para salvar la indeterminación tomamos reiterados:





Por lo tanto  **NO TIENE LÍMITE DOBLE, NO ES CONTINUA EN DICHO PUNTO**